Prof. Campillo

2do. PARCIAL – Z2062 – 2025

E1) Aplicando el teorema del rotor, calcule la circulación de $\bar{f}(x,y,z) = (x - y\ ,\ y + z^2\ ,\ z - x)$ a lo largo de la curva intersección de $z = x^2 + y^2$ con $z - 2x = 0$. Indique gráficamente el sentido de circulación elegido para recorrer la curva.

E2) a) Calcular el trabajo del campo de fuerzas $\bar{f}(x,y,z) = (x\,y\ ,\ z\ ,\ y)$ a lo largo de la curva intersección de las superficies $z = 2 - y - x^2$ con $y = x^2$ en el 1er octante. Indicar la orientación con la cual ha decidido recorrer la curva (punto inicial y punto final).

b) Dado el campo $\bar{f}(x,y) = (x^2\ ,\ -x\,y)$, hallar las líneas de campo de $\bar{f}$

E3) Calcular la masa del sólido definido por $2x + y \leq 4\ ,\ x + z \leq 2$ en el 1er. octante, si la densidad puntual es proporcional a la distancia de cada punto al plano yz

E4) Calcular la siguiente integral mediante la transformación $(x\ ,\ y) = (\ln u\ ,\ v)$, siendo D la región del primer cuadrante limitada por las curvas $y = e^x$, $y = e^{2x}$, con $x \leq 1$

$$\iint_D \frac{1}{e^x - 1}\, dx\, dy$$

T1) *a) Enunciar el teorema de la divergencia*

b) Demostrar que $\forall\ f(x,y,z) = k\,(x,y,z)$ con $k \in R$ el flujo que atraviesa una superficie cerrada que *cumple las hipótesis del teorema de la divergencia es proporcional al volumen encerrado por dicha superficie.*

T2) *Enunciar y demostrar la condición necesaria para la existencia de función potencial*

AM2	2° parcial Profe Campillo	HOJA N° 1 — FECHA 30-6-25 1°C 2025

(E1) Aplicando el teorema del rotor, calcular la circulación de $\bar{F}(x,y,z) = (\overset{P}{x-y}, \overset{Q}{y+z^2}, \overset{R}{z-x})$ a lo largo de la curva intersección de $z = x^2+y^2$ con $z-2x=0$.

Indicar, gráficamente, el sentido de circulación elegido para recorrer la curva

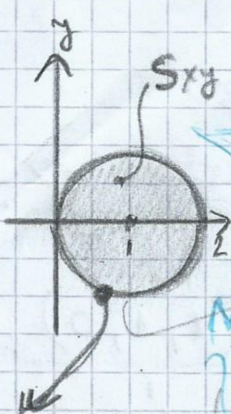
$\boxed{z = x^2+y^2} \rightarrow$ paraboloide

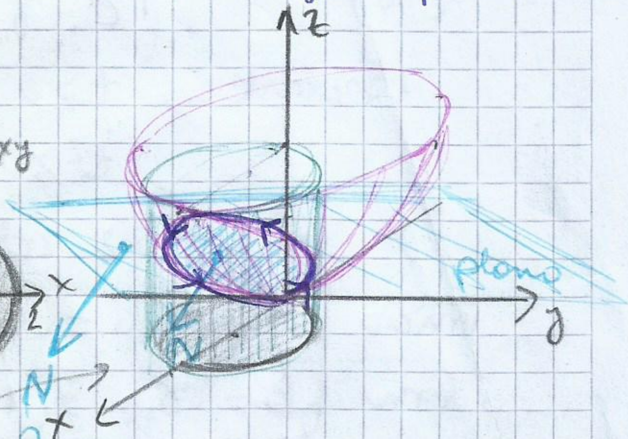
$\boxed{z-2x=0} \rightarrow$ plano

Analizo la proyección

$\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ z = 2x \end{cases} \rightarrow (x-1)^2+y^2 = 1$

$\begin{cases} x = r\cos(t)+1 \\ y = r\sin(t) \end{cases}$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$, $0 \le r \le 1$





$S: z-2x=0$

$N_S = (-2,0,1)$ ^ tiene que ser -

$\boxed{N_S = (2,0,-1)}$

$\oint_{C^+} \bar{F}\,d\bar{e} = \iint_S \mathrm{rot}(\bar{F})\,d\bar{\sigma} = \iint_S \mathrm{rot}(\bar{F})\,\check{n}\,ds = \iint_{S_{xy}} \mathrm{rot}(\bar{F})\,n\,dx\,dy \;\circledast$

$\bar{F} = (P,Q,R)$

$\mathrm{rot}(\bar{F}) = (R'_y - Q'_z,\ P'_z - R'_x,\ Q'_x - P'_y) = (0-2z,\ 0-(-1),\ 0-(-1))$

$\boxed{\mathrm{rot}(\bar{F}) = (-2z, 1, 1)}$

$z = 2x = 2(r\cos(t)+1)$

$\circledast = \iint_{S_{xy}} (-2z,1,1)(2,0,-1)\,dx\,dy = \iint_{S_{xy}} -4z-1\,.\,dx\,dy =$

C.V. $= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \overset{Jac}{r}\left(\overbrace{-4(2r\cos(t)+2)}^{-8r\cos(t)-8}-1\right)dr\,dt = \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^1 -8r^2\cos(t)\,dr\,dt}_{0} + \int_0^{2\pi}\int_0^1 -9r\,dr\,dt =$

$= -\frac{9}{2} \cdot 1 \cdot 2\pi = -9\pi$

$\boxed{\oint_{C^+} \bar{F}\,d\bar{e} = -9\pi}$

NOTA

E2 a) Calcular el trabajo del campo de fuerzas $\bar{F}_{(x,y,z)} = (xy, z, y)$ a lo largo de la curva intersección de las superficies

$z = 2 - y - x^2$ con $y = x^2$ en el 1º octante

Indicar la orientación con la cual ha decidido recorrer la curva (punto inicial y final)

$$C: \begin{cases} z = 2 - y - x^2 \\ y = x^2 \end{cases} \quad z = 2 - x^2 - x^2 = 2 - 2x^2$$

$x = t$

$$C: \bar{\gamma}_{(t)} = (\underset{x}{t}, \underset{y}{t^2}, \underset{z}{2-2t^2}) \rightarrow \bar{\gamma}'_{(t)} = (1, 2t, -4t)$$

1º octante $\rightarrow$ $t \geq 0$

$t^2 \geq 0$ $\quad \rightarrow \quad 0 \leq t \leq 1$

$2 - 2t^2 \geq 0 \rightarrow 2 \geq 2t^2 \rightarrow 1 \geq t^2 \rightarrow t \leq 1$

$$\begin{array}{ll} \text{inicio} & A = \bar{\gamma}_{(0)} = (0, 0, 2) \\ \text{fin} & B = \bar{\gamma}_{(1)} = (1, 1, 0) \end{array}$$

$$\int_C \bar{F} d\bar{l} = \int_{\bar{\gamma}(t)} \bar{F}(\bar{\gamma}_{(t)}) \, \bar{\gamma}'_{(t)} \, dt = \int_0^1 (t t^2, 2 - 2t^2, t^2)(1, 2t, -4t) \, dt =$$

$$= \int_0^1 t^3 + 4t - 4t^3 - 4t^3 \, dt = \int_0^1 -7t^3 + 4t \, dt = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\int_C \bar{F} d\bar{l} = 1/4}$$

b) Dado el campo $\bar{F}(x,y) = (x^2, -xy)$ hallar las líneas de campo de $\bar{F}$

l.c: $\bar{F}(\bar{\gamma}_{(t)}) = \bar{\gamma}'_{(t)} \longrightarrow (x^2, -xy) = (x'_{(t)}, y'_{(t)})$

$$\begin{cases} x^2 = \frac{dx}{dt} \\ -xy = \frac{dy}{dt} \end{cases} \longrightarrow \frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{-xy}$$

$$\frac{dx}{-x} = \frac{dy}{y}$$

integro m.a.m $\quad -\ln(x) + c = \ln(y)$

$$\ln(x^{-1}) + c = \ln(y)$$

$$e^{\ln(1/x)} e^c = e^{\ln(y)}$$

$$\frac{1}{x} k = y$$

$$\boxed{y = \frac{k}{x}}$$

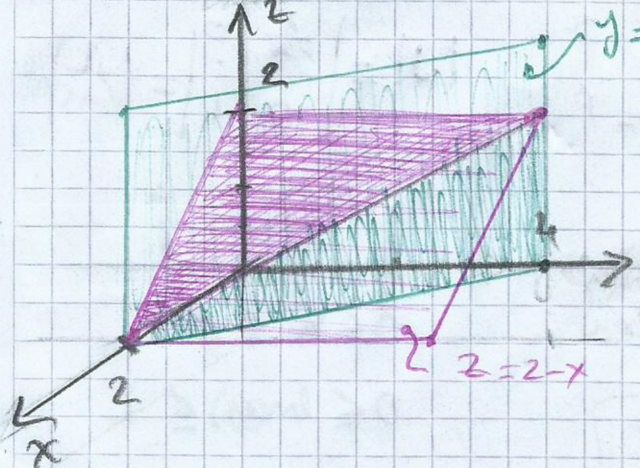
NOTA

AM2	2° parcial Prof. Campillo	HOJA N° 2/ FECHA 30-6-25

E3) Calcular la masa del sólido definido por $2x+y \leq 4$, $x+z \leq 2$ en el 1° octante si la densidad puntual es proporcional a la distancia de cada punto al plano yz

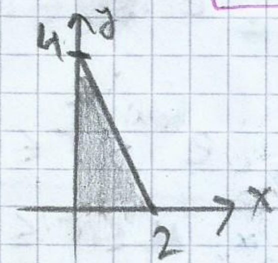
densidad: proporcional a la dist al plano yz $\rightarrow \delta_{(x,y,z)} = k|x|$

1° octante $\rightarrow \boxed{\delta_{(x,y,z)} = kx}$



$2x+y \leq 4 \rightarrow \boxed{y \leq 4-2x}$

$x+z \leq 2 \rightarrow \boxed{z \leq 2-x}$



$0 \leq x \leq 2$

$0 \leq y \leq 4-2x$

$0 \leq z \leq 2-x$

$$\text{Masa} = \iiint_W \delta_{(x,y,z)}\, dx\,dy\,dz = k\int_0^2 \int_0^{4-2x} \int_0^{2-x} x \; dz\,dy\,dx =$$

$$= k\int_0^2 \int_0^{4-2x} x(2-x)\; dy\,dx = k\int_0^2 (2x-x^2)(4-2x)\,dx =$$

$$= k\int_0^2 8x - 4x^2 - 4x^2 + 2x^3\, dx = 8/3$$

$$\boxed{\text{Masa} = \frac{8}{3}}$$

NOTA

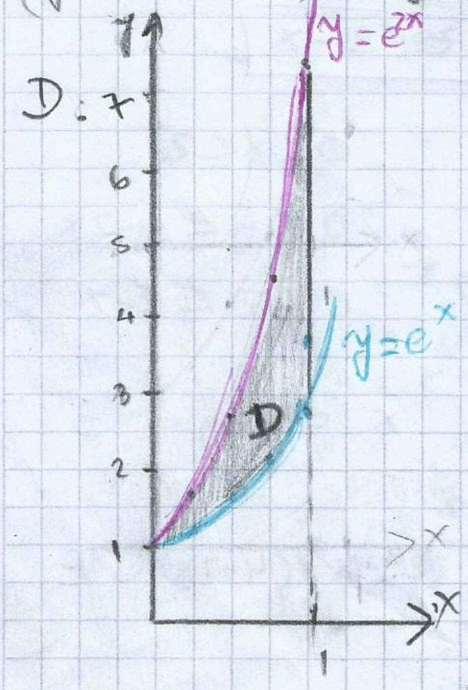
(E4) Calcular la sig. integral mediante la transformación $(x,y) = (\ln(u), v)$ siendo D la región del primer cuadrante limitada por las curvas $y = e^x$, $y = e^{2x}$, $x \leq 1$

$$\iint_D \frac{1}{e^x - 1}\,dx\,dy$$

$$\begin{cases} x = \ln(u) \\ y = v \end{cases} \quad \begin{array}{ll} \rightarrow x'_u = \frac{1}{u} & x'_v = 0 \\ \rightarrow y'_u = 0 & y'_v = 1 \end{array}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{1}{u} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \left|\frac{1}{u}\right|$$

D:



$$e^x \leq y \leq e^{2x}$$

$$\downarrow$$

$$e^{\ln(u)} \leq v \leq e^{\overbrace{2\ln(u)}^{\ln(u^2)}}$$

$$\boxed{u \leq v \leq u^2}$$

$$0 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq \ln(u) \leq 1$$

$$e^0 \leq e^{\ln(u)} \leq e^1$$

$$\boxed{1 \leq u \leq e^1}$$

$$I = \iint_D \frac{1}{e^x - 1}\,dx\,dy \overset{CV}{=} \int_1^e \int_u^{u^2} \overset{\text{Jac.}}{\frac{1}{u}} \cdot \frac{1}{e^{\ln(u)} - 1}\,dv\,du =$$

$$= \int_1^e \int_u^{u^2} \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{u-1}\,dv\,du = \int_1^e \int_u^{u^2} \frac{1}{u^2 - u}\,dv\,du =$$

$$= \int_1^e \frac{1}{\cancel{u^2 - u}} \cancel{(u^2 - u)}\,du = \int_1^e 1\,du = e - 1$$

$$\boxed{I = e - 1}$$

NOTA

AM 2	2° parcial Prof. Campello	HOJA N° 3 FECHA 30-6-25

T1 a) Enunciar el teorema de la divergencia

Sean: $\bar{F}: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \;/\; \bar{F}(x,y,z) = (P, Q, R)$

$\bar{F} \in C^1$

S una sup. frontera de W (región de $\mathbb{R}^3$), orientada al exterior

$$\Rightarrow \quad \oint\!\!\oint_S \bar{F}\, d\bar{s} = \iiint_W \operatorname{div}(\bar{F})\, dx\,dy\,dz$$

$\operatorname{div}(\bar{F}) = P'_x + Q'_y + R'_z$

b) Demostrar que $\forall\ \bar{F}(x,y,z) = k(x,y,z)$ con $k \in \mathbb{R}$ el flujo que atraviesa una sup. cerrada que cumple las hipótesis del teorema de la divergencia es proporcional al volumen encerrado por dicha superficie

x teorema de la divergencia $\rightarrow \oint\!\!\oint_S \bar{F}\, d\bar{s} = \iiint_W \operatorname{div}(\bar{F})\, dx\,dy\,dz$

donde $S = \partial W$ (frontera de W)

$$\bar{F}(x,y,z) = (kx, ky, kz) \rightarrow \operatorname{div}(\bar{F}) = \frac{\partial kx}{\partial x} + \frac{\partial ky}{\partial y} + \frac{\partial kz}{\partial z} =$$

$$= k + k + k = 3k$$

Entonces

Volumen de W

$$\oint\!\!\oint_S \bar{F}\, d\bar{s} = \iiint_W 3k\, \underbrace{dx\,dy\,dz}_{d\mathrm{vol}} = \underbrace{3k}_{\in \mathbb{R}} \boxed{\iiint_W d\mathrm{Vol}}$$

NOTA

2) Enunciar y demostrar la condición necesaria para la existencia de función potencial

Sea $\bar{F}: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\bar{F} \in C^1$ $(n \in \{2,3\})$

si $\underbrace{rot(\bar{F}) = \bar{0}}_{\equiv \text{ matriz jacob. simétrica}} \Leftarrow$ admite función potencial

Dem
Si $\bar{F}$ admite función potencial entonces: $\exists \varphi / \bar{F} = \bar{\nabla}\varphi$

Para $\mathbb{R}^2$ $\quad \bar{F} = (P, Q)$

$$(P, Q) = (\varphi'_x, \varphi'_y)$$

Matriz Jac de φ

$$J\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi'_x}{\partial x} & \frac{\partial \varphi'_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi'_y}{\partial x} & \frac{\partial \varphi'_y}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi''_{xx} & \varphi''_{yx} \\ \varphi''_{xy} & \varphi''_{yy} \end{pmatrix}$$

$$\bar{F} \in C^1 \text{ y } \bar{F} = \bar{\nabla}\varphi \Rightarrow \varphi \in C^2 \Rightarrow \underbrace{\varphi''_{xy} = \varphi''_{yx}}_{\text{matriz jac. simétrica}}$$

(se puede extender el concepto a $\mathbb{R}^3$)

NOTA